

# Estymacja pulsacji sinusoidy zaszumionej przy zastosowaniu zmodyfikowanego interpolatora widma Rife'a – Boorstyn'a

Praca przedstawia analizę estymatora pulsacji sinusoidy zaszumionej przy zastosowaniu zmodyfikowanego wzoru interpolującego widmo amplitudowe DFT zaproponowanego przez Rife'a i Boorstyn'a (1974). Problem estymacji sprowadza się do znalezienia pulsacji jedno-tonowego (monochromatycznego) sygnału zespolonego poddanego działaniu addytywnego białego szumu gaussowskiego. Dodatkowym ograniczeniem jest założenie niewielka liczba próbek obserwacji sygnału (od kilku do kilkuset). Omówiono teoretyczne podstawy algorytmu, sposób jego modyfikacji oraz wpływ różnego typu okien na błąd estymacji przy zadanym stosunku mocy sygnału do mocy szumu.

## 1. Wprowadzenie

Przedstawiona metoda estymacji pulsacji sygnału jedno tonowego, tj. odcinka niemodulowanej sinusoidy na podstawie niewielkiej liczby próbek stwarza możliwość ekstrakcji żądanej informacji przy niskich kosztach numerycznych. Już na podstawie analizy 32 próbek można określić częstotliwość takiego sygnału ukrytego w szumie o mocy porównywalnej z badanym sygnałem z dokładnością bliską teoretycznemu kresowi Cramera-Rao.

Opisany to algorytm został oparty na pracy Rife'a i Boorstyn'a [3]. Jego modyfikacja polega na wprowadzeniu okna przed faktyczną analizą i interpolacją widma DFT. Ten zabieg pozwala poprawić otrzymywane wyniki, a dostępne dziś moce obliczeniowe komputerów umożliwiają dokładne przebadanie charakterystyk błędów popełnianych przez algorytmy w funkcji mocy szumu.

W dalszej części pracy omówiono teoretyczne podstawy algorytmu i sposób jego modyfikacji oraz wpływ różnego typu okien na błąd estymacji przy zadanym stosunku sygnału do szumu (SNR).

## 2. Wykaz ważniejszych oznaczeń i skrótów w tekście i na rysunkach

$ (\cdot) $	– operator wyznaczający moduł każdego elementu ciągu
$\text{asinc}_N(\cdot)$	– $\text{asinc}_N(x) \triangleq \sin(\pi x) / (N \sin(\pi x/N))$ , funkcja okresowa, „zaaliasowany” $\text{sinc}(\cdot)$ o okresie $N$ ( $N$ naturalne)
C-R	– Cramera – Rao (kres)
DFT	– dyskretna transformacja Fouriera
DtFT	– dyskretno-czasowa transformacja Fouriera
$\varphi_0$	– faza początkowa sygnału sinusoidalnego, eksponencjalnego
$F_N$	– operator wyznaczający $N$ -punktowe widmo DFT ciągu $N$ -elementowego (np. poprzez FFT)
$j = \sqrt{-1}$	– jednostka urojona
$k$	– numer prążka DFT danego sygnału ( $k = -N/2, \dots, 0, \dots, N/2 - 1$ )
$k_0, k_1$	– numery prążków DFT wybranych w pierwszej części algorytmu, por. p. 3.2
$l$	– ułamkowe przesunięcie maksimum widma DtFT w stosunku do maksymalnego prążka $N$ -punktowego widma DFT
$N$	– długość badanego ciągu, długość okna, (zazwyczaj $N \in \{8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$ )

$n$	– numer próbki sygnału w dziedzinie czasu ( $n = 0, 1, \dots, N - 1$ )
R-BI	– estymator (interpolator) Rife’a-Boorstyn’a (por. p. 3.2)
RMS	– tu: błąd średniokwadratowy
$s[n]$	– $s[n] = e^{j(\omega_0 n + \varphi_0)}$ wartość (zespolona) próbki o numerze $n$ sygnału niezasmuowanego
$\text{sinc}()$	– $\text{sinc}(x) \triangleq \sin(\pi x)/(\pi x)$ , funkcja $\text{sinc}()$
sl	– nachylenie fragmentów charakterystyki przejściowej estymatora (por. (6))
SNR	– stosunek mocy sygnału do mocy szumu ( <i>Signal to Noise Ratio</i> )
$\text{var}()$	– operator wyznaczający wariancję zmiennej losowej
$W_N[k]$	– wartość $k$ -tego prążka widma DFT okna o długości $N$
$w_N[n]$	– wartość $n$ -tej próbki okna o długości $N$
$\omega_0$	– pulsacja sygnału dyskretnoczasowego, $\omega_0 \in \langle -\pi; \pi \rangle$
$\hat{\omega}$	– estymata pulsacji sygnału dyskretnoczasowego, $\hat{\omega} \in \langle -\pi; \pi \rangle$
$X_N[k]$	– wartość $k$ -tego prążka $N$ -punktowego DFT badanego sygnału
$X_0, X_1$	– wartości dwu kolejnych sąsiednich (wybranych przez algorytm) największych prążków DFT badanego sygnału, $X_0 = X_N[k_0]$ , $X_1 = X_N[k_1]$
$x[n]$	– wartość (zespolona) próbki sygnału o numerze $n$
$x_W[n]$	– wartość (zespolona) próbki sygnału poddanego okienkowaniu o numerze $n$
$\xi[n]$	– wartość rzeczywista próbki białego szumu gaussowskiego o numerze $n$
$z[n]$	– wartość zespolona próbki białego szumu gaussowskiego o numerze $n$

### 3. Algorytm

Zadaniem omawianego algorytmu jest estymacja pulsacji zasmuowanego sygnału sinusoidalnego na podstawie obserwacji niewielkiej liczby próbek tego sygnału. Estymatą największej wiarygodności [3] szukanej pulsacji  $\omega_0$  jest wartość pulsacji  $\hat{\omega}$ , dla której widmo amplitudowe dostępnej (krótkiej) realizacji sygnału przyjmuje wartość maksymalną. Zobrazowanie procesu omawianej dalej estymacji znajduje się na rys. 1.

#### 3.1 Założenia

Dalsza analiza zakłada, że badamy sygnał zespolony o postaci

$$x[n] = e^{j(\omega_0 n + \varphi_0)} + z[n] \quad (1)$$

gdzie  $z[n]$  jest realizacją zespolonego białego szumu gaussowskiego o zerowej wartości średniej i zadanej wariancji określającej moc szumu. Dysponujemy skończoną,  $N$ -punktową realizacją sygnału  $x[n]$ . Zakładając jednostkową amplitudę sinusoidy (1) oraz wariancję (średnią moc) szumu zespolonego  $\sigma^2$  otrzymujemy stosunek sygnału do szumu opisane zależnością

$$\text{SNR} = 10 \log_{10}(1/\sigma^2) \text{ [dB]} \quad (2)$$

W przypadku potrzeby analizy sygnału rzeczywistego ( $\cos(\omega_0 n + \varphi_0) + \xi[n]$ ) część urojona sygnału (1) otrzymujemy poprzez transformację Hilberta [4].

#### 3.2 Algorytm Rife’a-Boorstyn’a [3]

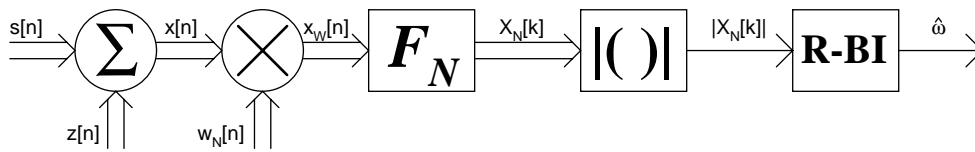
Procedura obliczeniowa estymaty składa się z dwóch części:

1. Obliczenie widma DFT [4] sygnału (1) oraz znalezienie przedziału pulsacji, w którym może znajdować się szukane maksimum – określenie położenia prążka o maksymalnej amplitudzie oraz większego (co do amplitudy) spośród jego „najbliższych sąsiadów”. W ten sposób otrzymujemy przedział pulsacji, w którym znajduje się wartość estymaty.
2. Na podstawie znajomości amplitud prążków znalezionych w pierwszej części możemy określić dokładniejsze położenie maksimum za pomocą tzw. interpolatora Rife’a – Boorstyn’a.

Niech  $X_0$  i  $X_1$  określają wartości prążków widma DFT wyznaczonych w pierwszej części algorytmu oraz  $X_0$  będzie  $k_0$ -tym prążkiem  $N$ -punktowego widma. Zachodzą następujące zależności:  $X_0 = X_N[k]$  i  $X_1 = X_N[k + 1]$ , ale w szczególności możemy również otrzymać  $X_0 = X_N[N/2 - 1]$  i  $X_1 = X_N[-N/2]$ . Estymata pulsacji wyraża się wzorem

$$\hat{\omega} = \frac{2\pi}{N} \left( k_0 + \frac{|X_1|}{|X_0| + |X_1|} \right) \quad (3)$$

którego prawą stronę przyjęło się nazywać estymatorem (pulsacji) lub interpolatorem widma (amplitudowego) Rife’a – Boorstyn’a.



Rys. 1. Model sygnału i zmodyfikowany algorytm estymacji pulsacji; oznaczenia jak w p. 2. i 3.

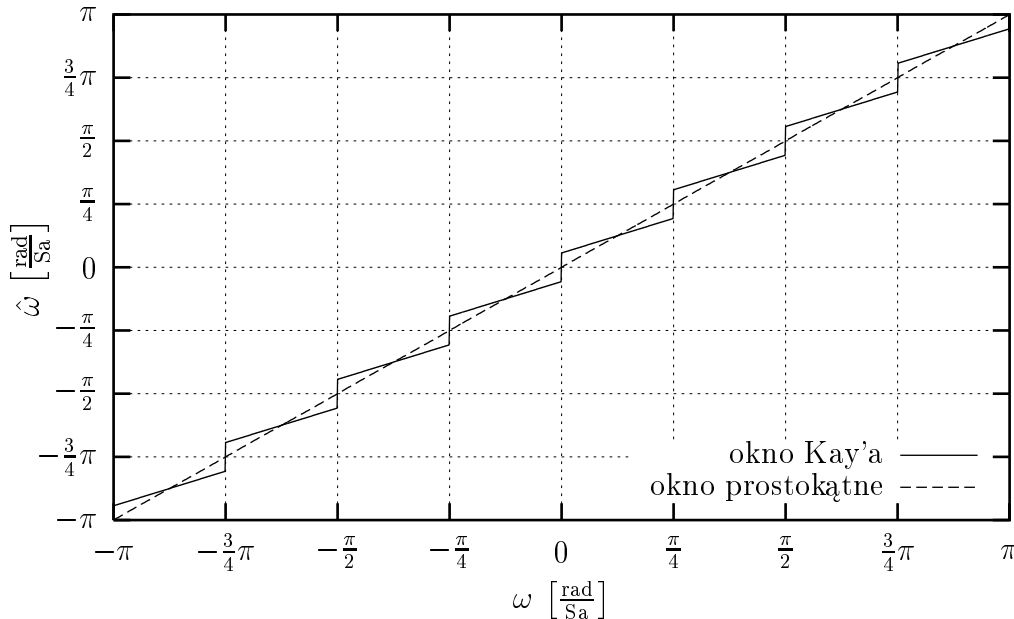
### 3.3 Modyfikacje algorytmu

Poniższe rozważania skupiają się na problemie interpolacji widma i nie biorą pod uwagę szumu ( $z[n] \equiv 0$ ,  $\text{SNR} = \infty$ ). Opisany w p. 3.2 algorytm znakomicie sprawdza się dla sygnału nie poddanego okienkowaniu (dla  $w_N[n] \equiv 1$ , por. rys. 1).

Tab. 1. Wzory opisujące badane okna

okno	$w_N[n] =$
prostokątne	1
Kay'a	$(n + 0.5)(N - (n + 0.5))$
typu $\sin^\alpha$	$\sin(\pi(n + 0.5)/N)^\alpha$
podniesiony cosinus	$(\cos(2\pi(n + 0.5 - N/2)/N) + 1) / 2$
Blackmana	$0.42 - 0.5 \cos(2\pi(n + 0.5)/N) + 0.08 \cos(4\pi(n + 0.5)/N)$
Hamminga	$0.54 - 0.46 \cos(2\pi(n + 0.5)/N)$

Zastosowanie takiego algorytmu dla sygnału o oknie różnym od prostokątnego wprowadza efekt schodków/nieciągłości charakterystyki statycznej (przejsiowej) estymatora (tj. dla  $z[n] \equiv 0$ ). Przykład tego zjawiska został przedstawiony na rys. 2. (Obliczenia te wykonano dla  $N = 8$ , gdyż wtedy efekt ten jest najwyraźniejszy). Punkty nieciągłości występują dla pulsacji, dla których w widmie DFT występuje prążek. Dla większych  $N$  widmo to jest „gęstsze” i amplituda schodków zmniejsza się proporcjonalnie do  $N$ . Pozostawienie algorytmu w takiej postaci wprowadzałoby znaczne obciążenie estymaty  $\hat{\omega}$ , nawet dla większych  $N$ .



Rys. 2. Przykład nieciągłości wprowadzanych przez okienkowanie przy zastosowaniu oryginalnego algorytmu [3].

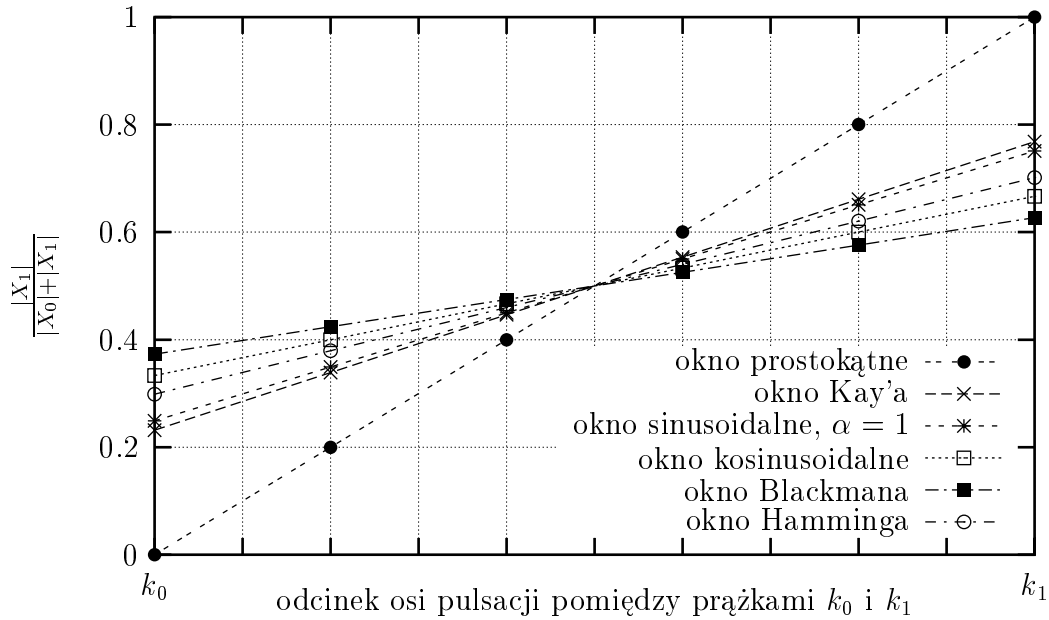
Dokładniejsza analiza problemu „schodków” wykazuje, że bezpośrednią przyczyną ww. nieciągłości jest szerokość (położenie pierwszego zera) głównego listka widma DtFT zastosowanego okna. W szczególności dla pulsacji  $\omega_0$  przypadającej dokładnie na prążek powinniśmy otrzymać

maksimum dla  $X_0$  oraz zero dla  $X_1$ . Dla okna prostokątnego jest to spełnione, ponieważ widmo amplitudowe DtFT okna (przesunięte na pulsację  $\omega_0$ ) ma dokładnie zero dla pulsacji prążka  $X_1$ . Inne okna na pulsacji odpowiadającej  $X_1$  będą miały wartość amplitudy tego prążka różną od zera.

We wzorze (3) w nawiasie występuje składnik

$$\frac{|X_1|}{|X_0| + |X_1|} \quad (4)$$

Dla okna prostokątnego jego wartość wraz ze zmianą położenia maksimum widma amplitudowego DtFT przebiega od zera dla pulsacji przypadającej dokładnie na prążek  $X_0$  poprzez 0.5 do 1 dla pulsacji przypadającej dokładnie na prążek  $X_1$ . Dla innych okien zakres zmian wartości jest mniejszy (por. rys. 3). Wykres na rys. 3 jest powtarzającym się fragmentem wykresu z rys. 2 – można go wpasować dokładnie w prostokąty wyznaczone przez linie siatki. Możemy to zrobić, ponieważ zmiana nachylenia linii z wykresu 3 dla różnych  $N$  jest niezauważalna — rzędu kilku procent (por. tab. 2). Jedynym wspólnym punktem wszystkich linii jest



Rys. 3. Zakres zmian jednego ze składników wzoru estymatora dla różnych okien

środek wykresu, czyli dla pulsacji wypadającej dokładnie pośrodku pomiędzy prążkami.

Korzystając z faktu, że estymujemy pulsację sinusoidy zespolonej możemy potraktować analizowane widmo jako spróbkowane widmo DtFT okna, przesunięte na skali pulsacji (przeheterodynowane) o  $\omega_0$ . Stąd można wyznaczyć wartości składnika (4) dla estymowanych pulsacji przypadających dokładnie dla prążka  $k_0$  lub  $k_1$ . Zachodzą wówczas następujące związki:

$$\begin{aligned} \text{maksimum dla } k_0 : \quad & X_0 = W_N[0], \quad X_1 = W_N[1] \\ \text{maksimum dla } k_1 : \quad & X_0 = W_N[-1] = W_N[1], \quad X_1 = W_N[0] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{wówczas nachylenie: } \text{sl} \triangleq \frac{|W_N[0]| - |W_N[1]|}{|W_N[0]| + |W_N[1]|} \in (0; 1) \quad (6)$$

Obliczone na tej podstawie wartości nachyleń  $\text{sl}$  przedstawione zostały w tab. 2.

Znając rodzaj okna oraz odpowiadające mu nachylenie możemy tak zmodyfikować algorytm (3), aby nie występował efekt „schodków”

$$\hat{\omega} = \frac{2\pi}{N} \left( k_0 + \frac{|X_1|}{|X_0| + |X_1|} \cdot \frac{1}{\text{sl}} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\text{sl}} \right) \right) \quad (7)$$

Jak łatwo zauważyć dla  $\text{sl} = 1$  algorytmy (estymatory) (3) i (7) są identyczne.

Tab. 2. Wyznaczone wartości nachyleń  $sl$  dla niektórych okien od ich długości  $N$ 

okno, $N =$	8	16	32	64	128	256	512
prostokątne	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Kay'a	0.5462	0.5368	0.5345	0.5340	0.5338	0.5338	0.5338
sinusoidalne, $\alpha = 0.1$	0.9223	0.9152	0.9119	0.9104	0.9097	0.9094	0.9092
sinusoidalne, $\alpha = 0.2$	0.8533	0.8419	0.8370	0.8349	0.8340	0.8336	0.8335
sinusoidalne, $\alpha = 0.5$	0.6881	0.6741	0.6693	0.6676	0.6670	0.6668	0.6667
sinusoidalne, $\alpha = 1$	0.5101	0.5024	0.5006	0.5002	0.5000	0.5000	0.5000
kosinusoidalne	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333
Blackmana	0.2537	0.2537	0.2537	0.2537	0.2537	0.2537	0.2537
Hamminga	0.4026	0.4026	0.4026	0.4026	0.4026	0.4026	0.4026

### 3.4 Obciążoność estymacji

Estymator określamy jako obciążony jeżeli wartość średnia estymaty  $\bar{\omega}$  nie jest równa prawdziwej wartości estymowanego parametru  $\omega_0$  [5]. Obciążeniem nazywamy różnicę pomiędzy tą wartością średnią a wartością prawdziwą.

Dokładniejsza analiza teoretyczna algorytmu wykazuje, że przykładowa linia łamana przedstawiona na rys. 2 nie jest, wbrew pozorom, złożona z odcinków prostej. W szczególności wszystkie linie z rys. 3 również nie są prostymi.

Zdefiniujmy nową zmienną niezależną  $l \in \langle 0, 1 \rangle$  jako ułamkowe przesunięcie maksimum widma amplitudowego DtFT względem prążka  $k_0$  tak, że  $l|_{k_0} = 0$  oraz  $l|_{k_1} = 1$ . Wówczas w idealnym przypadku, gdy wykres jest odcinkiem prostej (por. rys. 3) otrzymujemy

$$\left( \frac{|X_1|}{|X_0| + |X_1|} \right) \Big|_{\text{DtFT}_{max} \leftrightarrow (k_0+l)} = l \quad (8)$$

Dla braku okna (czyli okna prostokątnego) lewą stronę wzoru (8) można zapisać w postaci analitycznej jako

$$\frac{|\text{asinc}_N(1-l)|}{|\text{asinc}_N(0-l)| + |\text{asinc}_N(1-l)|} = l \quad (9)$$

Po przekształceniach, korzystając z właściwości funkcji  $\text{asinc}_N()$  oraz faktu, że  $l \in \langle 0; 1 \rangle$  zamiast lewej strony (9) otrzymujemy

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi l}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi l}{N}\right) + \sin\left(\frac{\pi(1-l)}{N}\right)} \quad (10)$$

Niestety, jak łatwo sprawdzić numerycznie, wyrażenie (10) nie jest równe  $l$ . Równość (8) jest dokładnie spełniona w przypadku granicznym, gdy

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{asinc}_N(x) = \text{sinc}(x) \quad (11)$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{|\text{sinc}(1-l)|}{|\text{sinc}(0-l)| + |\text{sinc}(1-l)|} &= \frac{\left| \frac{\sin(\pi(1-l))}{\pi(1-l)} \right|}{\left| \frac{\sin(-\pi l)}{-\pi l} \right| + \left| \frac{\sin(\pi(1-l))}{\pi(1-l)} \right|} = \\ &= \frac{\frac{\sin(\pi l)}{\pi(1-l)}}{\frac{\sin(\pi l)}{\pi l} + \frac{\sin(\pi l)}{\pi(1-l)}} = \frac{l \sin(\pi l)}{\sin(\pi l) - l \sin(\pi l) + l \sin(\pi l)} = l \end{aligned} \quad (12)$$

Powyższa równość tłumaczy pozorną liniowość wykresów z rys. 2 i 3, zwłaszcza że już dla względnie małych  $N$  obie funkcje,  $\text{sinc}()$  i  $\text{asinc}_N()$ , w przedziale  $\langle -1; 1 \rangle$  są do siebie zbliżone.

Podobne obliczenia analityczne dla pozostałych okien są dość złożone ze względu na potrzebę zastąpienia funkcji  $\text{asinc}_N()$  we wzorze (9) superpozycją  $N$  funkcji  $\text{asinc}_N()$  poprzesuwanych na osi pulsacji, wymnożonych przez odpowiednie wartości prążków DFT okna oraz dodatkowo przesuniętych w fazie (por. wzór interpolujący  $N$ -punktowe widmo DFT funkcjami  $\text{asinc}_N()$  [4]).

Błąd wynikający z niespełnienia równości (8) zmienia się w zależności od wartości  $l$  w sposób

zbliżony do przebiegu funkcji  $\sin(2\pi l)$  dla  $l \in \langle 0; 1 \rangle$ . Różnice kształtu wprowadzane przez zmianę parametru  $N$  czy rodzaju okna są nieznaczące, a położenie ekstremów obciążenia mieści się w zakresach  $l \in (0.2; 0.25)$  oraz  $l \in (0.75; 0.8)$ . Maksymalne wartości błędu zestawione zostały w tab. 3.

Tab. 3. Wartości maksymalnych błędów estymacji pulsacji dla danych okien wyrażone w decybelach (por. p. 4., wzór (13)) przy  $\text{SNR} \rightarrow \infty$ .

okno, $N =$	8	16	32	64	128	256	512
prostokątne	-70.14	-88.25	-106.32	-124.38	-142.44	-160.52	-178.58
Kay'a	-80.00	-104.54	-99.25	-103.78	-109.46	-115.40	-121.40
sinusoidalne, $\alpha = 0.1$	-74.67	-99.12	-119.29	-123.41	-133.69	-145.36	-157.55
sinusoidalne, $\alpha = 0.2$	-81.50	-102.37	-107.20	-118.12	-130.41	-143.22	-156.25
sinusoidalne, $\alpha = 0.5$	-80.51	-90.85	-104.39	-118.81	-133.57	-148.48	-163.47
sinusoidalne, $\alpha = 1$	-76.91	-94.44	-112.38	-130.41	-148.47	-166.53	-184.59
kosinusoidalne	-91.75	-122.31	-152.52	-182.65	-212.76	-242.86	-272.97
Blackmana	-77.31	-84.01	-90.08	-96.10	-102.12	-108.14	-114.16
Hamminga	-67.56	-73.04	-78.86	-84.83	-90.84	-96.86	-102.88

Biorąc pod uwagę założony dla powyższych obliczeń brak szumu, można określić, że tab. 3 zawiera wartości obciążeń estymatora dla bardzo dużych SNR. Intuicyjna ocena problemu oraz wykonane doświadczenia wykazują, że faktyczne obciążenie estymatora ma inny charakter. Wyznaczone wartości określają jedynie poziom, poniżej którego dokładność się nie poprawia — czyli poziom na którym błąd (np. średniokwadratowy) estymatora w funkcji SNR nasyci się.

Zgodnie z do tej pory przeprowadzonymi rozważaniami najmniejsze obciążenie przypada dla pulsacji dokładnie pomiędzy prążkami, oraz pulsacji prążka. Przeanalizujmy jaki wpływ na widmo amplitudowe DFT sygnału ma zakłócenie białym szumem gaussowskim. Wracając do składnika (4) estymatora (3) otrzymujemy dla sytuacji „pulsacji prążka” optymalną wartość  $X_1 = 0$ . Wówczas szum addytywny może zmienić wartość prążka  $|X_1|$  wyłącznie na większą, jednocześnie jakkolwiek zaszumione  $X_0$  nie jest w stanie skompensować zmiany wartości  $|X_1|$  tak aby składnik (4) został wyzerowany (Analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić dla przypadku, kiedy  $\omega_0$  przypada na  $X_1$ .)

Wprowadzenie okna powinno zmniejszać to obciążenie, ponieważ wartość  $X_1$  już nie musi być zerem. Jednakże biały szum gaussowski, który jest dodatkowo uśredniany wprowadzeniem okna (splatamy kołowo widma DFT okna i szumu) dodaje się do obu prążków  $X_0$  i  $X_1$ . Ten „uśredniony” szum jest nadal szumem gaussowskim (o innej średniej i wariancji), lecz nie można nazwać go białym.

Operator  $F_N$  jest operatorem liniowym, więc można rozpatrywać widmo zespolone  $X_N[k]$  jako sumę widm DFT sygnału  $s[n]$  oraz szumu  $z[n]$ . Jak wiadomo, kombinacja liniowa zmiennych losowych gaussowskich jest zmienną losową gaussowską, więc próbki widma DFT realizacji szumu są również realizacjami procesu gaussowskiego. Analizując wartości zespolone prążków DFT „czystego” sygnału oraz szumu na płaszczyźnie zespolonej (jako wektory) można zauważyć, że prawdopodobieństwo, iż ich suma będzie miała moduł większy od modułów składników, jest większe, niż w przypadku przeciwnym. W ten sposób zostają zaburzone proporcje pomiędzy wartościami amplitud badanych prążków. Najmniej wrażliwe na taką „skorelowaną” zmianę powinny być prążki dla pulsacji  $\omega_0$  wypadającej dokładnie pośrodku między nimi. Doświadczalne potwierdzenie powyższych hipotez znajduje się w dalszej części niniejszej pracy.

#### 4. Błąd estymacji w funkcji SNR

Błąd estymacji określamy zależnością

$$20 \log \left( \frac{|\omega_0 - \hat{\omega}|_{\pm\pi}}{2\pi} \right) [dB] \quad (13)$$

Należy przy tym zauważyć, że błąd ten jest liczony „modulo  $\pm\pi$ ”, czyli na płaszczyźnie  $\mathcal{Z}$  jako krótsza odległość po okręgu jednostkowym. Wobec tego maksymalny błąd, jaki można popełnić wynosi  $|\omega_0 - \hat{\omega}| = \pi$ , co jest równoważne  $-6\text{dB}$

Proponowany algorytm składa się z dwóch części; w pierwszej części bezbłędna estymacja zawęża zakres dopuszczalnych pulsacji do szerokości  $2\pi/N$ . Tym samym maksymalna wartość błędu równa się właśnie szerokości tego zakresu. W tab. 4 znajdują się wartości maksymalnych błędów w drugiej części algorytmu przeliczone na unormowaną skalę decybelową wg (13).

Tab. 4. Wartości maksymalnych błędów w drugiej części algorytmu.

$N$	8	16	32	64	128	256	512
błąd maksymalny [dB]	-18.06	-24.08	-30.10	-36.12	-42.14	-48.16	-54.19

#### 4.1 Metoda analizy

Zmodyfikowany algorytm został zaimplementowany w języku skryptowym oferowanym przez *Octave* [6] (kompatybilny z oprogramowaniem *Matlab*<sup>®</sup> [7]). W celu testowania algorytmu generowana była  $N$ -punktowa sinusoida zespolona (cisoida) o zadanej pulsacji  $\omega_0$  i przypadkowej fazie początkowej. Do niej dodawano biały zespolony szum gaussowski o zerowej składowej stałej i jednostkowej wariancji (mocy średniej). Szum ten przeskalowywano zgodnie z zadawanym SNR [dB], czyli mnożąc (próbka po próbce) przez  $10^{-\text{SNR}[\text{dB}]/20}$ .

W ten sposób stworzony sygnał zaszumiony poddawany był po okienkowaniu zaimplementowanemu algorytmowi. Otrzymana estymata pulsacji  $\hat{\omega}$  po porównaniu z pulsacją prawdziwą  $\omega_0$  pozwalała na określenie błędu popełnionego przez estymator. Tak otrzymane wartości błędów w liczbie co najmniej kilkuset dla danego zestawu parametrów ( $N$ , SNR,  $\omega_0$ , okno) zostały poddane obróbce statystycznej. Jako najbardziej reprezentatywny obliczany był błąd średniokwadratowy (RMS).

Ze względu na właściwości algorytmu gęstość testów w dziedzinie SNR była zróżnicowana, i tak: w przedziale  $-30 \div -13\text{dB}$  co 1dB,  $-13 \div 15\text{dB}$  co 0.25dB,  $16 \div 30\text{dB}$  co 2dB,  $32 \div 80\text{dB}$  co 4dB. W ten sposób można było dokładniej zbadać fragmenty zależności błędu w funkcji SNR w przedziale, gdzie ona gwałtownie się zmienia.

#### 4.2 Kres Cramera-Rao

Z definicji kres Cramera-Rao (C-R) szacuje minimalną wartość wariancji estymaty nieobciążonej, tj. estymata nieobciążona danej wielkości (tu: pulsacji) nie może mieć wariancji mniejszej niż określona tym kresem [5]. Ponieważ błąd średniokwadratowy jest estymatą wariancji, można więc umieścić na jednym wykresie linię wyznaczoną teoretycznie jako kres Cramera-Rao oraz ów błąd średniokwadratowy. Interpretując wykresy należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że kres dotyczy estymaty nieobciążonej, natomiast badana estymata jest obciążona (w ogólności gorsza od nieobciążonej).

Poniższy wzór określa teoretycznie wyznaczony [3] kres C-R dla realizacji o długości  $N$ . Ze względu na inne oznaczenia i skalę częstotliwości/pulsacji postać wzoru została zmieniona względem oryginału (używając oznaczeń z [3] mielibyśmy:  $\text{SNR} := b_0^2/2\sigma^2$  oraz  $2\pi := T$ )

$$\text{var}(\hat{\omega}) = \frac{6}{\text{SNR} \cdot (2\pi)^2 N(N^2 - 1)} \quad (14)$$

#### 4.3 Wyniki eksperymentów

Obliczenia wykonane dla  $N = 16$  są uśrednione po ponad 4100 realizacjach. Pozostałe wyniki powstały z uśrednienia ponad 1800. Pomimo tak dużej liczby realizacji wykresy w krytycznym przedziale  $-15 \div 10\text{dB}$  nie są „zbyt gładkie”.

##### 4.3.1 Błąd estymacji w funkcji SNR

###### dla różnych położenia pulsacji względem prążków widma DFT

Wyniki symulacji pokazały, że dla zadanego  $N$  i typu okna zależność błędu od SNR zmienia swój względny charakter przy zmianie  $\omega_0$  cyklicznie co  $\Delta\omega_0 = 2\pi/N$  zachowując symetrię względem  $l = 0.5$ . Rife i Boorstyn w swoim opracowaniu [3] sugerują większe błędy dla niskich częstotliwości/pulsacji niż dla wysokich pulsacji (bliskich  $\pm\pi$ ), jednakże wyniki przeprowadzonych symulacji nie wykazywały takiej regularności.

Znamiennym „parametrem” charakterystyk błędu z rys. 4 jest próg dla którego wartość błędu gwałtownie maleje oraz odległość odcinka liniowego tej charakterystyki dla dużego SNR

od kresu C-R. I tak dla  $l = 0$  mamy najmniejszą (najlepszą) wartość progową, natomiast gorsze wyniki dla większych SNR oraz dokładnie odwrotną sytuację dla  $l = 0.5$ . W tym drugim przypadku okno prostokątne oraz sinusoidalne dla małych  $\alpha$  skutkuje wynikiem zbliżonym do kresu C-R. W tabelach 5 i 6 znajdują się szacunkowe wartości tych parametrów (patrz punkt 4.3.2). Niestety charakterystyka dla okna prostokątnego (braku okna) wykazuje drugi próg (garb) przy  $l = 1/8$  i zanikający dla  $l \rightarrow 0$  lub  $l \rightarrow 0.5$ . Okno sinusoidalne z  $\alpha = 0.1$  w znacznym stopniu niweluje ten efekt; dla większych wartości  $\alpha$  oraz innych okien efekt nie jest zauważalny.

#### 4.3.2 Błąd estymacji w funkcji SNR przy zastosowaniu różnych okien

Na rys. 4 przedstawiona została przykładowa rodzina charakterystyk (dla okna sinusoidalnego z  $\alpha = 0.5$ ) dla różnych  $N$  i krytycznych (wg poprzedniego pp.) wartości parametru  $l$ . Wykres z rys. 4 przedstawia dla kolejnych wartości  $N$  następujące krzywe:

- charakterystyka błędu dla  $l = 0$  („pulsacja prążka”)
- charakterystyka błędu dla  $l = 0.5$  (pulsacja pośrodku pomiędzy prążkami)
- kres C-R

Pomimo nałożenia na wykres wielu linii można je rozróżnić, ponieważ charakterystyka dla  $l = 0$  ma niższy próg oraz większe błędy na odcinku liniowym charakterystyki (dla  $l = 0.5$  wyższy próg, mniejsze błędy na odcinku liniowym). Kresy C-R to ukośne linie proste — najwyższa (duże wartości błędów) — to kres dla  $N = 8$ , kolejne linie dla  $N = 16, 32, 64, 128, 256$ , ostatnia linia dla  $N = 512$ .

W tab. 5 znajdują się szacunkowe wartości znamienych parametrów tych charakterystyk. Wartość progowa była określana na poziomie 3dB powyżej „stycznej” do odcinka liniowego dla danej krzywej z zaokrągleniem „w dół” do najbliższej realizowanej w badaniach wartości SNR (dokładność  $\pm 0.25\text{dB}$ ).

Tab. 5. Zestawienie wartości progowych SNR dla różnych okien i różnych  $N$

okno	$l$	$N$						
		8	16	32	64	128	256	512
prostokątne	0	-0.75	-1.75	-1.50	-5.25	-8.00	-10.50	-14.00
	0.5	6.75	4.25	1.75	-1.25	-4.00	-7.75	-10.50
Kaya	0	1.50	0.00	-2.25	-4.75	-6.75	-9.50	-11.75
	0.5	3.25	2.00	-0.75	-2.50	-5.50	-8.00	32.00
sinusoidalne $\alpha = 0.1$	0	0.50	-1.00	-2.50	-5.00	-8.00	-10.25	-14.00
	0.5	5.75	3.25	1.00	-2.75	-5.25	-8.25	-10.75
sinusoidalne $\alpha = 0.2$	0	0.50	-0.25	-2.25	-4.75	-7.75	-9.75	-14.00
	0.5	4.75	2.25	-0.50	-3.25	-6.75	-7.75	-11.25
sinusoidalne $\alpha = 0.5$	0	0.75	-0.50	-2.25	-4.50	-6.50	-10.25	-12.25
	0.5	3.50	1.50	-0.25	-3.75	-6.50	-8.25	-10.75
sinusoidalne $\alpha = 1$	0	1.25	0.00	-2.00	-3.75	-7.25	-8.75	-12.00
	0.5	3.25	1.50	-0.50	-3.25	-4.50	-7.75	-10.25
kosinusoidalne	0	2.00	0.75	0.25	-3.00	-6.00	-8.25	-12.25
	0.5	3.25	2.00	-0.25	-2.25	-4.75	-7.75	-11.00
Blackmana	0	2.25	1.75	-1.25	-3.50	-5.75	-8.50	-11.25
	0.5	3.50	2.25	0.50	-2.00	-4.75	-7.75	-10.50
Hamminga	0	1.25	0.75	-1.25	-4.00	-6.00	-9.00	-12.25
	0.5	2.75	1.50	-0.75	-3.25	-5.50	-8.50	-10.00

Tab. 6 zawiera uśrednione wartości odległości odcinka liniowego charakterystyki od odpowiadającego mu kresu C-R. Jak łatwo zauważyć dla danego okna odległości te praktycznie nie zmieniają się z wydłużeniem realizacji  $N$ .

Z analizy tab. 5 wynika, że największą wartość progową (w gorszym przypadku, gdy  $l = 0.5$ ) ma okno sinusoidalne z parametrem  $\alpha = 0.5$ . Jeżeli chodzi o maksymalną odległość od kresu C-R, to przodują tu również okna sinusoidalne, chociaż w tym przypadku okno o  $\alpha = 0.2$  jest najlepsze, a okno dla  $\alpha = 0.5$  niewiele mu ustępuje. Należy zwrócić uwagę na fakt, że różnica

między maksymalną i minimalną wartością progowego SNR (dla przypadku gorszego, gdy  $l = 0$ ) wynosi około 3.5dB dla  $N = 8$  i maleje do około 2dB dla  $N = 512$ . Innymi słowy, dla badanego zestawu okien różnice wyników są relatywnie małe.

Tab. 6. Zestawienie odległości fragmentu liniowego charakterystyki błędu od kresu Cramera-Rao, dla różnych okien i wartości  $N$

okno	$l$	$N$						
		8	16	32	64	128	256	512
prostokątne	0	9.57	9.58	9.62	9.69	9.81	9.83	9.79
	0.5	-0.11	0.09	0.19	-0.12	-0.03	0.23	0.03
Kaya	0	5.69	5.75	5.83	6.02	6.16	5.84	6.05
	0.5	1.56	1.64	1.68	1.78	1.94	1.89	4.86
sinusoidalne $\alpha = 0.1$	0	5.80	5.77	5.53	5.64	5.50	5.13	5.67
	0.5	0.00	0.08	-0.03	0.27	0.22	0.08	0.26
sinusoidalne $\alpha = 0.2$	0	5.29	5.51	5.25	5.34	5.28	5.27	5.27
	0.5	0.36	0.28	0.41	0.20	0.59	0.26	0.26
sinusoidalne $\alpha = 0.5$	0	5.37	5.36	5.72	5.34	5.55	5.51	5.60
	0.5	0.68	1.06	0.94	0.87	0.91	1.06	0.98
sinusoidalne $\alpha = 1$	0	5.65	5.97	5.95	5.91	5.78	5.92	5.93
	0.5	1.95	2.21	2.15	1.96	2.03	2.18	2.10
kosinusoidalne	0	6.93	7.03	6.98	6.73	7.03	6.95	7.13
	0.5	4.11	4.08	4.14	4.38	4.11	3.89	4.00
Blackmana	0	7.79	7.75	7.90	7.99	7.72	7.91	7.82
	0.5	5.51	5.46	5.41	5.20	5.38	5.48	5.38
Hamminga	0	6.32	6.39	6.21	6.40	6.33	6.40	6.08
	0.5	2.94	2.73	2.83	2.98	2.62	2.89	2.90

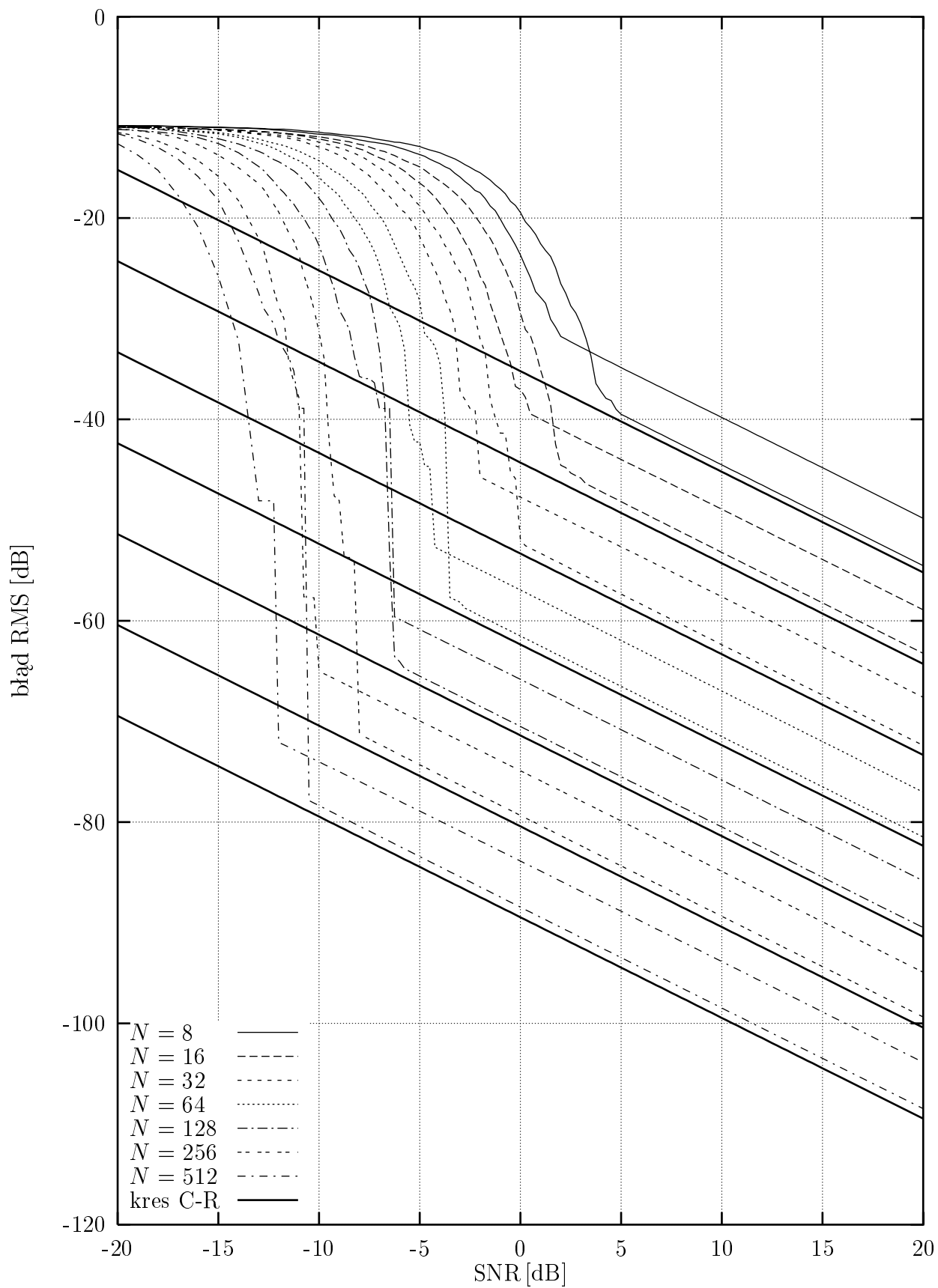
## 5. Podsumowanie

Badania zmodyfikowanego estymatora pulsacji tzw. interpolatora widma amplitudowego Rife'a – Boorsyn'a wykazały, że najlepszym z badanych okien jest okno sinusoidalne z parametrem  $\alpha = 0.5$ . Jednakże przy pracy z bardzo dużym stosunkiem sygnału do szumu najlepszym oknem jest okno kosinusoidalne (por. tab. 3). Różnice pomiędzy wynikami dla badanego zestawu okien są relatywnie małe (rzędu pojedynczych decybeli), jednak wprowadzenie okienkowania istotnie poprawia właściwości algorytmu względem wersji pierwotnej [3].

Praca ta analizuje zagadnienia związane z wpływem okienkowania na jakość algorytmu Rife'a-Boorstyn'a [3] i może stanowić podstawę do dalszych, dokładniejszych badań zmodyfikowanego algorytmu dla zanalizowanych już okien oraz innych, nie uwzględnionych w tej pracy. W [2] dokładniej omówiono i bogato zilustrowano własności przedstawionego tu algorytmu.

## Bibliografia

1. S. Kay: "A Fast and Accurate Single Frequency Estimator" IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-37 Dec. 1989 pp. 1987-1990
2. P. Ortyl: „Interpolator Rife'a-Boorstyn'a — raport z projektu”, czerwiec 2000, KSI, WETI, Politechnika Gdańska
3. D.C. Rife, R.R. Boorstyn: "Single-Tone Parameter Estimation from Discrete-Time Observations" IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-20 Sept. 1974, pp. 591-598
4. M. Rojewski: Wykłady z „Cyfrowego przetwarzania sygnałów” 1999/2000, sem. V, KSI, WETI, Politechnika Gdańska
5. R. Rykaczewski: Wykłady z „Sygnałów przypadkowych” 1998/1999, sem. IV, KSI, WETI, Politechnika Gdańska
6. <http://www.che.wisc.edu/octave/octave.html>
7. <http://www.mathworks.com>



Rys. 4. Zależność błędu średniokwadratowego estymacji od stosunku sygnału do szumu dla okna sinusoidalnego ( $\alpha = 0.5$ ) i zmiany długości analizowanego ciągu (objaśnienia w tekście, p. 4.3.2).